Über verschiedene Konvergenzarten der trigonometrischen Reihen. II (Die Entwicklung der Ableitungen)

Von LÁSZLÓ LEINDLER in Szeged

Einleitung

Sei $f(x)$ eine 2π-periodische, auf $(0, 2\pi)$ quadratisch integrierbare Funktion mit der Fourier-Entwicklung

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \equiv S[f]. \tag{1}$$

Bezeichne $E_n = E_n^{(2)}(f)$ den besten Annäherungsgrad von $f(x)$, im Sinne der Metrik von $L^2(0, 2\pi)$, mit trigonometrischen Polynomen $(n-1)$-ter Ordnung; nach dem Satz von GRAM [2] ist

$$E_n^2 = \pi \sum_{k=n}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \pi \sum_{k=n}^{\infty} \varrho_k^2.$$

Wenn wir im Folgenden über die Existenz der p-ten Ableitung einer Funktion $f(x)$ sprechen (p eine natürliche Zahl), so verstehen wir, dass $f(x)$ fast überall gleich der p-fach iterierten Integralfunktion einer integrierbaren Funktion $g(x)$ ist, und dann nennen wir $g(x)$ die p-te Ableitung von $f(x)$, in Formel: $g(x) = f^{(p)}(x)$.

Satz I. *Unter der Bedingung*

$$\int_0^1 \frac{1}{t^{p+\frac{3}{2}}} \left(\int_0^{2\pi} [f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)]^2 \, dx \right)^{1/2} dt < \infty \tag{2}$$

gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^p (|a_k| + |b_k|) < \infty.$$

Satz II. *Unter der Bedingung*

$$\int_0^1 \frac{|\log t|}{t^{p+1}} \left(\int_0^{2\pi} [f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)]^2 \, dx \right)^{1/2} dt < \infty \tag{3}$$

existiert $f^{(p)}(x)$ und konvergiert ihre Fourier-Entwicklung fast überall unbedingt, d. h. bei jeder Anordnung ihrer Glieder.

Satz III. *Unter der Bedingung*

$$\int_0^1 \frac{(|\log t|)^{1/2}}{t^{p+1}} \left(\int_0^{2\pi} [f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)]^2 \, dx \right)^{1/2} dt < \infty \tag{4}$$

existiert $f^{(p)}(x)$ und konvergieren die Reihen

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \pm (A_n \cos nx + B_n \sin nx) \qquad \left(\begin{matrix} A_n \\ B_n \end{matrix} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^{(p)}(x) \begin{matrix} \cos nx \\ \sin nx \end{matrix} dx \right)$$

bei fast allen Vorzeichenverteilungen gleichmäßig.

Satz IV. *Ist*

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{|\log t|}{t^{2p+1}} (f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x))^2 \, dx \, dt < \infty, \tag{5}$$

so existiert $f^{(p)}(x)$ und konvergiert ihre Fourier-Entwicklung fast überall.

Satz V. *Unter der Bedingung*

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{t^{2p+2}} (f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x))^2 \, dx \, dt < \infty \tag{6}$$

existiert $f^{(p)}(x)$ und wenn sie eine 2π-periodische, stetige Funktion ist, so ist die Fourier-Entwicklung von $f^{(p)}(x)$ gleichmäßig konvergent.

Man könnte noch weitere ähnliche Sätze, z. B. für die Summation und für verschiedene Arten von Approximationen und Summationen (siehe die entsprechenden Sätze mit $p=0$ in [4], [5]) leicht beweisen.

Wir setzen

$$w_2^{(2)}(\delta, f) = \left\{ \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} \left(\int_{-\pi}^{\pi} [f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)]^2 \, dx \right) dt \right\}^{1/2}.$$

Satz VI. *Unter der Bedingung*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-\frac{1}{2}} w_2^{(2)} \left(\frac{1}{n}, f \right) < \infty$$

existiert $f^{(p)}(x)$ und hat eine absolut konvergente Fourier-Entwicklung.

Satz VII. *Ist*

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^{p-1} (\log n) \, w_2^{(2)} \left(\frac{1}{n}, f \right) < \infty,$$

so existiert $f^{(p)}(x)$ und konvergiert ihre Fourier-Entwicklung fast überall unbedingt.

§ 1. Hilfssätze

Hilfssatz I. *Ist $f(x) \in L^2(0, 2\pi)$, so gilt*

$$E_n \leqq w_2^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f\right) \qquad \text{(s. [4], Hilfssatz II).}$$

Hilfssatz II. *Es sei $\lambda(x)$ eine positive, monoton nichtwachsende Funktion mit $\lambda^{-1}(n) = O(n^\beta)$ $(\beta > 0)$. Dann folgt aus der Bedingung*

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2 \lambda\left(\frac{1}{t}\right)} \left(\int_0^{2\pi} [f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)]^2\, dx\right)^{1/2} dt < \infty \tag{1.1}$$

die Ungleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda(n)} E_n < \infty \tag{1.2}$$

und aus der Bedingung

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2 \lambda\left(\frac{1}{t}\right)} \int_0^{2\pi} [f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)]^2\, dx\, dt < \infty \tag{1.3}$$

die Ungleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda(n)} E_n^2 < \infty. \tag{1.4}$$

Beweis. Die Implikation (1. 3)⇒(1. 4) haben wir schon in [5] (s. den Hilfssatz III) bewiesen. Die Implikation (1. 1)⇒(1. 2) beweisen wir ähnlich zum Beweis des Satzes I von [4]. Ist $f(x)$ in $(0, 2\pi)$ fast überall konstant, so ist die Behauptung klar. Wir nehmen an, daß $f(x)$ nicht fast überall konstant ist. Nach der Parsevalschen Gleichung gilt

$$F(t) = \int_0^{2\pi} [f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)]^2\, dx = 16\pi \sum_{k=1}^{\infty} \varrho_k^2 \sin^4 kt. \tag{1.5}$$

Nach den Obigen ist die Funktion

$$\alpha(t) = \left(t^2 \lambda\left(\frac{1}{t}\right) \sqrt{F(t)}\right)^{-1}$$

fast überall endlich. Aus der Bedingung (1. 1) und aus der Definition von $\alpha(t)$ ergibt sich, daß

$$\int_0^1 \frac{1}{t^4 \lambda^2\left(\frac{1}{t}\right) \alpha(t)}\, dt < \infty \tag{1.6}$$

und

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \alpha(t)[f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)]^2\,dx\,dt<\infty \tag{1.7}$$

sind. Aus (1. 5) und (1. 7) folgt, auf Grund des Satzes von FUBINI,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varrho_k^2 \int_0^1 \alpha(t)\sin^4 kt\,dt<\infty. \tag{1.8}$$

Wir bezeichnen mit I_k die Menge derjenigen Punkte t von $[0, 1]$, für die $\sin^4 kt \geqq \frac{1}{4}$ ist. Bezeichne

$$I(k)=\int_{I_k} \alpha(t)\,dt.$$

Nach (1. 8) besteht

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varrho_k^2 I(k)<\infty. \tag{1.9}$$

Es sei $\{p_m\}$ $(p_0=0)$ eine Folge von natürlichen Zahlen, für die

$$2^{m\beta} \leqq \sum_{n=p_{m-1}}^{p_m-1} \frac{1}{\lambda(n)} \leqq K_1 2^{m\beta} \qquad (K_1 \geqq 2) \tag{1.10}$$

$(m=1, 2, \ldots)$ erfüllt ist. Die Existenz einer solchen Folge $\{p_m\}$ ist auf Grund der bezüglich $\lambda(x)$ getroffenen Bedingungen klar. Wir definieren nun die Folge $\{k_m\}$ folgenderweise: es sei k_m die kleinste unter den natürlichen Zahlen n, für die $p_m \leqq n < p_{m+1}$ und

$$I(n)=\min_{p_m \leqq k < p_{m+1}} \{I(k)\}$$

gelten. Wir zeigen, daß

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^{2\beta m}}{I(k_m)}<\infty \tag{1.11}$$

ist. Zuerst beweisen wir, daß

$$I(k_m) \geqq \frac{1}{2^{8+4\beta}}\, 2^{2\beta m} \left(\int_{\frac{1}{p_{m-2}}}^{\frac{1}{p_{m-3}}} \frac{1}{t^4 \lambda^2\left(\frac{1}{t}\right) \alpha(t)}\,dt \right)^{-1} \tag{1.12}$$

ist. Es sei $\Delta_m=\left[\frac{1}{p_{m-2}}, \frac{1}{p_{m-3}}\right]$. Durch Anwendung der Cauchyschen Ungleichung erhält man

$$(1.13)\qquad \left(\int\limits_{\Delta_m\cap I_{k_m}} \frac{1}{t^2\lambda\left(\frac{1}{t}\right)}\,dt\right)^2 \leqq \int\limits_{\Delta_m\cap I_{k_m}} \alpha(t)\,dt\cdot \int\limits_{\Delta_m\cap I_{k_m}} \frac{1}{t^4\lambda^2\left(\frac{1}{t}\right)\alpha(t)}\,dt \leqq$$

$$\leqq l(k_m)\int\limits_{\Delta_m} \frac{1}{t^4\lambda^2\left(\frac{1}{t}\right)\alpha(t)}\,dt.$$

Das Integral links kann man wegen der Monotonität von $\lambda(x)$ und $\lambda^{-1}(n)=O(n^{\beta})$ folgenderweise abschätzen:

$$(1.14)\qquad \int\limits_{\Delta_m\cap I_{k_m}} \frac{1}{t^2\lambda\left(\frac{1}{t}\right)}\,dt \geqq \frac{1}{2^4}\int\limits_{\Delta_m} \frac{1}{t^2\lambda\left(\frac{1}{t}\right)}\,dt = \frac{1}{2^4}\int\limits_{\bar{\Delta}_m} \frac{1}{\lambda(x)}\,dx,$$

wobei $\bar{\Delta}_m$ das Intervall $[p_{m-3}, p_{m-2}]$ bezeichnet. Nach (1.10) ist

$$\int\limits_{\bar{\Delta}_m} \frac{1}{\lambda(x)}\,dx \geqq \sum_{n=p_{m-3}}^{p_{m-2}-1} \frac{1}{\lambda(n)} \geqq \frac{1}{2^{2\beta}}\,2^{m\beta}.$$

Daraus und aus (1.13) und (1.14) folgt die Ungleichung (1.12). Die Ungleichung (1.11) bekommen wir aus (1.12) auf Grund von (1.6) sofort. Um den Beweis der Implikation (1.1)$\Rightarrow$(1.2) zu beweisen, müssen wir noch zeigen, daß (1.2) aus (1.9) und (1.11) folgt. Durch einfache Rechnung ergibt sich:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda(n)}E_n = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=p_m}^{p_{m+1}-1}\frac{1}{\lambda(n)}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\varrho_k^2\right)^{1/2} \leqq$$

$$\leqq \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=p_m}^{p_{m+1}-1}\frac{1}{\lambda(n)}\sum_{\nu=m}^{\infty}\left(\sum_{k=p_\nu}^{p_{\nu+1}-1}\varrho_k^2\right)^{1/2} \leqq$$

$$\leqq K_1\sum_{m=0}^{\infty}2^{m\beta}\sum_{\nu=m}^{\infty}\left(\sum_{k=p_\nu}^{p_{\nu+1}-1}\varrho_k^2\right)^{1/2} \leqq 2^{\beta}K_1\sum_{m=0}^{\infty}2^{m\beta}\left(\sum_{k=p_m}^{p_{m+1}-1}\varrho_k^2\right)^{1/2}.$$

Daraus bekommen wir weiter durch Anwendung der Cauchyschen Ungleichung:

$$\frac{1}{2^{\beta}K_1\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda(n)}E_n \leqq \sum_{m=0}^{\infty}\sqrt{l(k_m)}\left(\sum_{k=p_m}^{p_{m+1}-1}\varrho_k^2\right)^{1/2}\cdot\frac{2^{m\beta}}{\sqrt{l(k_m)}} \leqq$$

$$\leqq \left\{\sum_{m=0}^{\infty} l(k_m)\sum_{k=p_m}^{p_{m+1}-1}\varrho_k^2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2^{2\beta m}}{l(k_m)}\right\}^{1/2},$$

woraus das Erfülltsein der Bedingung (1.2) auf Grund der Definition von $l(k_m)$ und der Ungleichungen (1.9) und (1.11) folgt.

Damit haben wir den Hilfssatz II bewiesen.

§ 2. Beweis der Sätze

Beweis von Satz I. Aus der Bedingung (2) auf Grund des Hilfssatzes II mit $\lambda(x)=x^{1/2-p}$ ergibt sich

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\left(p-\frac{1}{2}\right)} E_n < \infty.$$

Hieraus folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^p(|a_k|+|b_k|) < \infty \tag{2.1}$$

wegen

$$\sum_{k=3}^{\infty} k^p(|a_k|+|b_k|) \leqq 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} k^{2p} \sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} \varrho_k^2 \right\}^{1/2} \leqq$$

$$\leqq 2^{p+1} \sum_{m=1}^{\infty} 2^{m\left(p+\frac{1}{2}\right)} E_{2^m} \leqq 2^{2p+2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=2^{m-1}+1}^{2^m} n^{p-\frac{1}{2}} E_n < \infty.$$

Beweis von Satz II.

Aus (3) nach dem Hilfssatz II mit $\lambda(x)=\dfrac{x^{1-p}}{|\log x|}$ folgt

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^{p-1} (\log n) E_n < \infty.$$

Daraus

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{k=n}^{\infty} k^{2p} \varrho_k^2} \leqq 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{\sum_{k=2^m+1}^{\infty} k^{2p} \varrho_k^2} \leqq \tag{2.2}$$

$$\leqq 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{\sum_{\nu=m}^{\infty} 2^{2(\nu+1)p} \sum_{k=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} \varrho_k^2} \leqq 2^{p+1} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\nu=m}^{\infty} 2^{\nu p} E_{2^\nu} \leqq$$

$$\leqq 2^{p+1} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu 2^{\nu p} E_{2^\nu} \leqq 2^{2p+3} \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} n^{p-1} (\log n) E_n =$$

$$= 2^{2p+3} \sum_{n=2}^{\infty} n^{p-1} (\log n) E_n < \infty.$$

Dies ergibt insbesondere

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varrho_k^2 k^{2p} < \infty,$$

folglich existiert $f^{(p)}(x)$ und gehört zu $L^2(0,2\pi)$. Somit gilt nach einem bekannten Satz (s. z. B. [8] S. 40): $S^{(p)}[f]=S[f^{(p)}]$. Nach einem Satz des Verfassers [3] konvergiert $S[f^{(p)}]$ fast überall unbedingt, wenn

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} E_n^{(2)}(f^{(p)}) < \infty \tag{2.3}$$

ist. Um den Satz II zu beweisen, genügt es also (2.3) zu zeigen.

Aus (2. 2) folgt aber (2. 3), weil

$$E_n^{(2)}(f^{(p)}) = \left(\sum_{k=n}^{\infty} k^{2p} \varrho_k^2\right)^{1/2}$$

ist.

Beweis von Satz III. Nach einem Satz von SALEM und ZYGMUND [7] genügt es zu zeigen, daß

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n[\log n]^{1/2}} E_n^{(2)}(f^{(p)}) < \infty \tag{2. 4}$$

ist. Da $S^{(p)}[f] = S[f^{(p)}]$ auch jetzt gilt, so ist $E_n^{(2)}(f^{(p)}) = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} k^{2p} \varrho_k^2\right\}^{1/2}$. Nach dem Hilfssatz II mit $\lambda(x) = \dfrac{x^{1-p}}{[|\log x|]^{1/2}}$ ist

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^{p-1} [\log n]^{1/2} E_n < \infty$$

wegen (4). Daraus kann man (2. 4) durch eine einfache, zu (2.2) analoge Rechnung herleiten.

Beweis von Satz IV. Aus (5) folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2p-1} (\log n) E_n^2 < \infty,$$

woraus wir die Ungleichung

$$\sum_{k=2}^{\infty} k^{2p} \varrho_k^2 \log k < \infty \tag{2. 5}$$

folgenderweise erhalten können:

$$\sum_{k=3}^{\infty} k^{2p} \varrho_k^2 \log k = O(1) \sum_{k=3}^{\infty} k^{2p} \varrho_k^2 \sum_{n=3}^{k} \frac{1}{n} = O(1) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{\infty} k^{2p} \varrho_k^2 =$$

$$= O(1) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{1}{n} \sum_{\nu=m}^{\infty} \sum_{k=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} k^{2p} \varrho_k^2 = O(1) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\nu=m}^{\infty} 2^{2p\nu} E_{2^\nu}^2 =$$

$$= O(1) \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu 2^{2p\nu} E_{2^\nu}^2 = O(1) \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} (\log n) n^{2p-1} E_n^2 < \infty.$$

Aus (2. 5) und $S^{(p)}[f] = S[f^{(p)}]$ folgt die Behauptung des Satzes IV nach dem wohlbekannten Kolmogoroff—Seliverstoff—Plessnerschen Satz.

Beweis von Satz V. Aus (6) ergibt sich nach dem Hilfssatz II mit $\lambda(x) = x^{-2p}$, daß

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2p} E_n^2 < \infty$$

ist. Daraus folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{2p+1} \varrho_k^2 = O(1) \sum_{n=1}^{\infty} n^{2p} E_n^2 < \infty;$$

Also gibt es eine monotone ins Unendliche strebende $\{\mu_k\}$ derart, daß auch

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k k^{2p+1} \varrho_k^2 < \infty$$

besteht. Daraus erhalten wir

$$(2.6) \quad \sum_{k=1}^{n} k[k^p(|a_k|+|b_k|)] \leqq \left[\sum_{k=1}^{n} k\mu_k[k^p(|a_k|+|b_k|)]^2\right]^{1/2} \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\mu_k}\right]^{1/2} = o(n).$$

Da $S^{(p)}[f]=S[f^{(p)}]$ ist, so folgt aus (2. 6) und aus der Stetigkeit von $f^{(p)}(x)$ nach einem bekannten Satz (s. z. B. [1] S. 177), daß die Fourier-Entwicklung von $f^{(p)}(x)$ gleichmäßig konvergiert, was zu beweisen war.

Auf Grund des Hilfssatzes I und der Beweise der Sätze I und IV kann man die Sätze VI—VII leicht beweisen.

Schriftenverzeichnis

[1] Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды* (Москва, 1961).
[2] J. P. Gram, Über die Entwicklung reeller Funktionen in Reihen Mittels der Methode der kleinsten Quadrate, *J. reine angew. Math.*, **94** (1883), 41—73.
[3] L. Leindler, Über unbedingte Konvergenz der Orthogonalreihen mit strukturellen Bedingungen, *Studia Math.*, **23** (1963), 113—117.
[4] L. Leindler, Über verschiedene Konvergenzarten trigonometrischer Reihen, *Acta Sci. Math.*, **25** (1964), 233—249.
[5] L. Leindler, Über hinreichende Strukturbedingungen für Fourierreihen, *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.*, **10** (1965).
[6] A. Plessner, Über Konvergenz von trigonometrischen Reihen, *J. reine angew. Math.*, **15** (1926), 15—25.
[7] R. Salem—A. Zygmund, Some properties of trigonometric series, whose terms have random signs, *Acta Math.*, **91** (1954), 245—301.
[8] A. Zygmund, *Trigonometric series.* I—II (Cambridge, 1959).

(Eingegangen am 27. Januar 1964)